Devoir Maison n°6

Matrices et compagnie

À rendre pour le mardi 20 février

Exercice 1 : Vers les polynômes de matrices

Étant donné $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on pose $\delta = ad - bc$ et $\theta = a + d$ (respectivement le déterminant et la trace de A). On définit le polynôme $P(X) = X^2 - \theta X + \delta$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note R_k le reste de la division euclidienne de X^k par $P(X)$.

1) Justifier que le reste R_k s'écrit sous la forme $a_k X + b_k$ avec $a_k, b_k \in \mathbb{K}$.
2) Calculer (a_k, b_k) pour $k \in \{0, 1, 2\}$.
3) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $a_{k+1} = \theta a_k + b_k$ et $b_{k+1} = -\delta a_k$.
4) Montrer que $A^2 - \theta A + \delta I_2 = 0$.
5) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, montrer que $A^k = a_k A + b_k I_2$.
6) On suppose maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   (a) On suppose que $P(X)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$, notées λ_1 et λ_2. Exprimer a_k et b_k en fonction de λ_1, λ_2 et k. Application : déterminer A^k avec $A = \begin{pmatrix} -29 & 40 \\ -24 & 33 \end{pmatrix}$.
   (b) On suppose que $P(X)$ admet une racine double dans $\mathbb{C}$, notée λ. Exprimer a_k et b_k en fonction de λ et k. Application : déterminer A^k avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : Un système paramétré

Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le système suivant d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$